$\mathbb{Z}_{16}/\ker\varphi = \{ [0]+\ker\varphi,\ [1]+\ker\varphi,\ [2]+\ker\varphi,\ [3]+\ker\varphi \}$

$[2]+\ker\varphi \oplus [3]+\ker\varphi = ([2]+[3])+\ker\varphi = [5]+\ker\varphi = [1]+[4]+\ker\varphi =$
$= [1]+\ker\varphi.$

$\bar{\varphi}([a]+\ker\varphi) = \varphi[a]$

Μάθημα 14ο — 08/04/16

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 3

ΑΣΚΗΣΗ 1:

$O \times O$

$a\Sigma\beta \Leftrightarrow \exists\gamma : \gamma a \gamma^{-1} = \beta$

α) αυτοπαθής $a\Sigma a \Rightarrow 1a1^{-1} = a$

β) Αν $a\Sigma\beta \Rightarrow \beta\Sigma a$

$\gamma a\gamma^{-1} = \beta \Rightarrow \gamma^{-1}\gamma a \gamma^{-1}\gamma = \gamma^{-1}\beta\gamma \Rightarrow a = \gamma^{-1}\beta\gamma$

γ) Αν $a\Sigma\beta$ και $\beta\Sigma\gamma \Rightarrow a\Sigma\gamma$

$\varepsilon a \varepsilon^{-1} = \beta,\ \delta\beta\delta^{-1} = \gamma \Rightarrow \delta(\varepsilon a \varepsilon^{-1})\delta^{-1} = \gamma \Rightarrow \delta\varepsilon a \varepsilon^{-1}\delta^{-1} = \gamma \Rightarrow \delta\varepsilon a (\delta\varepsilon)^{-1} = \gamma.$

ΑΣΚΗΣΗ 2:

$\Sigma_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}.$

$\gamma 1 \gamma^{-1} = 1,\ \forall \gamma \in O$

Άρα, το 1 είναι συζυγές μόνο με τον εαυτό του

$\bar{1}$ = κλάση του $1 = \{1\}$

κλάση του f: $\bar{f} = \{\gamma f \gamma^{-1} \mid \gamma \in \Sigma_3\}$

$1f1^{-1} = f \quad fff^{-1} = f,\ f^2 f f^{-2} = f$

$gfg^{-1} = f^2,\ fgf(fg)^{-1} = \underbrace{fgfg}_{f^2} f^{-1} = ff^2f^{-1} = f^2$

$\overline{f} = \{f, f^2\}$, $f^2 g f (f^2 g)^{-1} = f^2 \underbrace{gfg}_{f^2} f^{-2} = f^2 f^2 f^{-2} = f^2$

$\overline{g} = \{g, \underset{\overset{\shortparallel}{f^2 g}}{gf}, fg\}$, $fgf^{-1} = fgf^2 = gf^2 f^2 = gf$ (+)

$g\underbrace{fg}_{=gf^2} = f^2$ (++)

$gfg = f^2$, $f^2 g f^{-2} = f^2 g f \overset{(+)}{=} gff = gf^2 \overset{(++)}{=} fg$

$\Sigma_3 = \{1\} \sqcup \{f, f^2\} \sqcup \{g, fg, f^2 g\}$

ΑΣΚΗΣΗ 3:

$\sigma (a_1, a_2, \ldots, a_k) \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_k))$

Αυτές οι μεταθέσεις είναι ίσες ή έχουν τις ίδιες εικόνες.

$\sigma (a_1, a_2, \ldots, a_k) = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_k)) \sigma$

Έστω $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\} - \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

$\sigma (a_1, a_2, \ldots, a_k)(i) = \sigma(i)$

$(\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_k))(\sigma(i)) = \sigma(i)$.

$i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Έστω $i = a_t$

$\sigma (a_1, a_2, \ldots, a_k)(a_t) = \sigma(a_{t+1}) = \sigma(a_{t+1})$

$(\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_k)) \sigma(a_t) =$

$(\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_k))(\sigma(a_t)) = \sigma(a_{t+1})$

Ο συζυγής ενός κύκλου είναι κύκλος του ίδιου μήκους.

ΑΣΚΗΣΗ 4:

$SL(2,\mathbb{R}) \triangleleft GL(2,\mathbb{R})$

$A \in GL$
$B \in SL$

$ABA^{-1} \in SL \Leftrightarrow \det(ABA^{-1}) = 1$;;;

$\det A \det B \det A^{-1} = \det A \det A^{-1} \det B = \det B = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 5:

$Y \leq 0$, $H \triangleleft 0$, $Y \cap H \triangleleft Y$

$Y \cap H$ τομή υποομάδων $\leq Y, H, 0$.

$a \in Y$, πρέπει $a Y \cap H a^{-1} \subseteq Y \cap H$
$b \in Y \cap H$, πρέπει $a b a^{-1} \in Y \cap H$

$$\left.\begin{array}{l} a \in Y \text{ και } b \in Y \Rightarrow aba^{-1} \in Y \\ a \in Y \text{ και } b \in H \triangleleft 0 \Rightarrow aba^{-1} \in H \end{array}\right\} \Rightarrow aba^{-1} \in Y \cap H$$

ΑΣΚΗΣΗ 7:

$H \triangleleft 0$ και $a \in 0 \Rightarrow 0/H$ ομάδα, $Ha \in 0/H \Rightarrow o(Ha) \mid o(a)$

$\varphi: 0 \to G$
$o(\varphi(a)) \mid o(a)$

$\varphi: 0 \to 0/H$
$a \mapsto \varphi(a) = Ha$

ΑΣΚΗΣΗ 8:

$\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Q}$ αβελιανή

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Q}\}$.

$3 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

$3.5 + \mathbb{Z} = 0.5 + 3 + \mathbb{Z} = 0.5 + \mathbb{Z}$

$\forall r \leq -1$ ή $r \geq 1 \Rightarrow r = r' + p/q$

$r' \in \mathbb{Z}$ και $-1 < p/q < 1$

$-3.5 = -3 - 0.5 = -4 + 0.5$

$\forall r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, p/q \in [0,1)$ και $r' \in \mathbb{Z}$ με $r = r' + p/q \Rightarrow r + \mathbb{Z} = r' + p/q + \mathbb{Z} = p/q + \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{p/q + \mathbb{Z} \mid 0 \leq p/q < 1\} \Rightarrow O(p/q + \mathbb{Z})$

$k\left(p/q + \mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z} \Rightarrow$ όταν $k = q$, τότε $k\left(p/q + \mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}$

Άρα, το $\left(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right)$ έχει πεπερασμένη τάξη.

ΑΣΚΗΣΗ 10:

$|H| = 5,\ |K| = 12 \Rightarrow H \cap K = \{1\}$.

$H \cap K \leq H, K$ 0

$|H \cap K| \mid |H|$ και $|K| \Rightarrow |H \cap K| \mid (|H|, |K|) = (5, 12) = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 11:

$|O| = \pi\rho$, π, ρ πρώτοι ξένοι

Αν $Y \lneq O \Rightarrow Y$ κυκλική

$Y < O \Rightarrow |Y| \mid |O| \Rightarrow |Y| = 1$, $\pi, \rho \Rightarrow Y$ κυκλική

$\varphi : O \to G$ ομομορφισμός ομάδων.

$\ker\varphi = \{ a \mid a \in O$ και $\varphi(a) = 1_G \} = \varphi^{-1}\{1_G\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: 1) Ο $\ker\varphi \trianglelefteq O$
2) φ μονομορφισμός $\Leftrightarrow \ker\varphi = \{1_O\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:
1) Θέλουμε $\forall a \in O$ και $b \in \ker\varphi$ να ισχύει $aba^{-1} \in \ker\varphi \Leftrightarrow \varphi(aba^{-1}) = 1_G$
$\varphi(aba^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)1_G\varphi(a)^{-1} = 1_G \Rightarrow$ Ισχύει

2) φ μονομορφισμός $\Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow a = b$
$1_O \in \ker\varphi$
$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = 1_G$
$\varphi(ab^{-1}) = 1_G \Rightarrow ab^{-1} \in \ker\varphi$.
$\gamma \neq 1_O \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(\gamma) = 1_G = \varphi(1)$
$\gamma = 1_O$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αφού $\ker\varphi \trianglelefteq O$ ορίζεται η $O/\ker\varphi$

Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών: Αν $\varphi : O \to G$ επιμορφισμός ομάδων, τότε ορίζεται ισομορφισμός $\bar{\varphi}$: $O/\ker\varphi \to G$ με τύπο $\bar{\varphi}(a\ker\varphi) = \varphi(a)$

$$\begin{tikzcd} \ker\varphi \arrow[r, "i"] & O \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G \\ & O/\ker\varphi \arrow[ur, dashed, "\cong"', "\bar{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

$\pi(a) = a\ker\varphi$ · σύμπλοκο $\in O/\ker\varphi$.

Θέλουμε $\varphi = \bar{\varphi}\pi$

Ορίζουμε $\bar{\varphi}(a\ker\varphi) = \varphi(a)$

Μπορεί $a\ker\varphi = \beta\ker\varphi$

Πρέπει $\varphi(a) = \varphi(\beta)$

$a\ker\varphi = \beta\ker\varphi \Leftrightarrow a\beta^{-1} \in \ker\varphi \Leftrightarrow \varphi(a\beta^{-1}) = 1_G \Leftrightarrow \varphi(a)\cdot\varphi(\beta^{-1}) = 1_G$

$\varphi(a) = \varphi(\beta)$ Ισχύει

Άρα, η $\bar{\varphi}$ είναι καλά ορισμένη.

Πρέπει α) $\bar{\varphi}$ ομομορφισμός: $\bar{\varphi}(a\ker\varphi \cdot \gamma\ker\varphi) = \bar{\varphi}(a\gamma\ker\varphi) = \varphi(a\gamma) =$
$= \varphi(a)\varphi(\gamma) = \bar{\varphi}(a\ker\varphi)\bar{\varphi}(\gamma\ker\varphi)$

β) $\bar{\varphi}$ "1-1"

γ) $\bar{\varphi}$ επί

β) $\bar{\varphi}$: 1-1 $\Leftrightarrow \ker\varphi = \{\ker\varphi\}$

$\bar{\varphi}(a\ker\varphi) = 1_G \Leftrightarrow \varphi(a) = 1_G \Leftrightarrow a \in \ker\varphi \Leftrightarrow a\ker\varphi = \ker\varphi$.

γ) επί: $\forall g \in G \Rightarrow \varphi$ επί $\exists a \in O$ με $\varphi(a) = g$

$\varphi(a) = \bar{\varphi}(a\ker\varphi)$.

Αν $\varphi: O \to G$ όχι επί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\varphi: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8$ όχι επί

$\varphi([1]_4) = [2]_8$

φ: 1-1 όχι επί

$\ker\varphi = \{[0]_4\}$

$\varphi(\mathbb{Z}_4) = \{\underset{0}{\varphi[0]}, \underset{2}{\varphi[1]}, \underset{4}{\varphi[2]}, \underset{6}{\varphi[3]}\} = \langle [2]_8 \rangle$

$\varphi: \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\text{επί}} \varphi(\mathbb{Z}_4) = \langle [2] \rangle \lneq \mathbb{Z}_8$

$\varphi: \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \varphi(\mathbb{Z}_4)$

Επιμορφισμός

Άρα, εφαρμόζεται το 1.Θ.Τ.

$\exists\ \bar{\varphi}: \mathbb{Z}_4/\ker\varphi \longrightarrow \varphi(\mathbb{Z}_4)$

$\ker\varphi = \{[0]\}$

$\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_4/\ker\varphi \xrightarrow{\cong} \varphi(\mathbb{Z}_4)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$GL(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^*$

$\varphi(A) = \det A$

Να εφαρμόσουμε το 1º Θ.Τ.

$\nexists\ A \in GL(n,\mathbb{R})$ με $\det A = 0$

Η φ ~~όχι~~ επί: $GL(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} \varphi(GL(n,\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$

$\ker\varphi = \{A \mid \det A = 1\} = SL(n,\mathbb{R})$

Ορίζεται ισομορφισμός : $\bar{\varphi}: GL(n,\mathbb{R})/\ker\varphi \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{R}^*$

$\bar{\varphi}: GL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εστω $\varphi: O \to G$ επιμορφισμός ομάδων. Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των υποομάδων της G και των υποομάδων της O οι οποίες περιέχουν τον πυρήνα της φ. (Χωρίς απόδειξη)

$\ker\varphi \leq Y \leq O \longleftrightarrow \varphi(Y) \leq G \quad [\varphi^{-1}(B) \leftarrow B \leq G]$

$\ker\varphi \leq Y \lhd O \longleftrightarrow \varphi(Y) \lhd G$

Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμών: Εστω $H \lhd Y \lhd O$ και $H \lhd O$. Τότε $Y/H \lhd O/H$ και $\left(O/H\right)/\left(Y/H\right) \cong O/Y$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $O = \mathbb{Z}$, $Y = 2\mathbb{Z}$, $H = 6\mathbb{Z}$

$$\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right)/\left(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}_6/\left(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}_6/2\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \underset{\langle[1]\rangle}{\mathbb{Z}_6} \geqslant \underset{\langle[2]\rangle}{2\mathbb{Z}_6} \cong 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = 2\,\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

Από το 3ο Θ.Ι έχουμε $\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right)/\left(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$ ∎

$\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^+$

$\mathbb{Q} \not\cong \mathbb{Q}^+$

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $\quad \underbrace{(r+\mathbb{Z}) + \cdots + (r+\mathbb{Z})}_{k} = kr + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$